

N

(20318)

B.A./B.Sc.-I

Roll No.

US-4188

B. A./B. Sc. (Annual) Examination, 2018

MATHEMATICS-III

Geometry & Vector Calculus

(AB-128)

(Unified Syllabus)

Time : Three Hours]

*[Maximum Marks : { B.A. : 34
B.Sc. : 70*

Note : This paper is divided into five Sections – A, B, C, D & E. Section-A (Short Answer Questions) contains one question of ten parts requiring short answer. All these *ten* parts are compulsory. Sections– B, C, D & E (Descriptive Answer Questions) each contains two questions. Attempt *one* question from each Section. Answer must be descriptive.

इस प्रश्न-पत्र को पाँच खण्डों-अ, ब, स, द एवं इ में विभाजित किया गया है। खण्ड-अ (लघु उत्तरीय प्रश्न) में एक लघु उत्तरीय प्रश्न है, जिसके दस भाग हैं। ये सभी दस भाग अनिवार्य हैं। खण्डों-ब, स, द एवं इ (विस्तृत उत्तरीय प्रश्न) प्रत्येक में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न कीजिए। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है।

(2)

Section-A

खण्ड-अ

(Short Answer Questions)

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

This Section contains one question of ten parts requiring short answers. Each part carries 1.4/3 marks. 14/30 इस खण्ड में एक प्रश्न के दस भागों के लघु उत्तर अपेक्षित हैं। प्रत्येक भाग 1.4/3 अंकों का है।

1. (i) Show that the equation:
 $x^2 - 3xy + y^2 + 10x - 10y + 21 = 0$
represents a hyperbola.
दिखाइये कि समीकरण:
 $x^2 - 3xy + y^2 + 10x - 10y + 21 = 0$
एक अतिपरवलय प्रदर्शित करती है।
- (ii) Find the equation of directrix of a conic
 $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$.
शांकव $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ की नियता का समीकरण ज्ञात कीजिए।
- (iii) The midpoints of the sides of a triangle are (1, 5, -1), (0, 4, -2) and (2, 3, 4). Find its vertices.
एक त्रिभुज की भुजाओं के मध्यबिन्दु (1, 5, -1), (0, 4, -2) तथा (2, 3, 4) हैं। इसके शीर्षों को ज्ञात कीजिए।

US-4188

(3)

(iv) To prove that if l_1, m_1, n_1 and l_2, m_2, n_2 are the direction cosines of two lines and θ is the angle between them, then $\cos \theta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$.

सिद्ध कीजिए कि यदि l_1, m_1, n_1 तथा l_2, m_2, n_2 दो रेखाओं की दिक्-कोज्याएँ हैं तथा इनके बीच का कोण θ है, तो $\cos \theta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$ होगा।

(v) Find the equation of the plane through the points (1, -2, 2), (-3, 1, -2) and perpendicular to the plane $x + 2y - 3z = 5$.

बिन्दुओं (1, -2, 2), (-3, 1, -2) से होकर तथा समतल $x + 2y - 3z = 5$ के लम्बवत् समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

(vi) Show that the plane $2x - 2y + z + 12 = 0$ touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0$.

दिखाइये कि समतल $2x - 2y + z + 12 = 0$ गोले $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0$ को स्पर्श करता है।

(vii) Find the equation of the cylinder with generators parallel to z-axis and passing through the curve $ax^2 + by^2 = 2cz, lx + my + nz = p$.

US-4188

(4)

उस बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके जनक

z-अक्ष के समान्तर हैं तथा वक्र $ax^2+by^2=2cz$,

$lx+my+nz=p$ से होकर जाता है।

(viii) If vector $\vec{a}(t)$ has a constant direction, then :

$$\vec{a} \times \frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{0}.$$

यदि सदिश $\vec{a}(t)$ की दिशा अचर है, तो :

$$\vec{a} \times \frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{0}.$$

(ix) Find curl \vec{f} , if $\vec{f} = z^2\hat{i} + x^2\hat{j} + y^2\hat{k}$.

curl \vec{f} निकालिए, यदि $\vec{f} = z^2\hat{i} + x^2\hat{j} + y^2\hat{k}$.

(x) Given that :

दिया है कि :

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}, & t = 2 \\ 4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}, & t = 3 \end{cases}$$

Show that :

दिखाइये कि :

$$\int_2^3 \left(\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) dt = 10.$$

(5)

Sections-B, C, D & E

खण्ड-ब, स, द एवं इ

(Descriptive Answer Questions)

(विस्तृत उत्तरीय प्रश्न)

Each Section contains two questions. Attempt one question from each Section. Each question carries 5/10 marks. Answer must be descriptive. 20/40

प्रत्येक खण्ड में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न कीजिए।

प्रत्येक प्रश्न 5/10 अंकों का है। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है।

Section-B

खण्ड-ब

2. A line makes angles $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ with four diagonals of a cube, show that :

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + \cos^2 \delta = \frac{4}{3}.$$

एक रेखा घन के चार विकर्णों के साथ कोण $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ बनाती है,

तो दर्शाइये कि :

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + \cos^2 \delta = \frac{4}{3}.$$

Or/अथवा

3. A variable plane is parallel to the given plane

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0 \text{ and meets the axes at } A, B, C \text{ respectively.}$$

Prove that the circle ABC lies on the surface :

$$yz \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + zx \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) + xy \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) = 0.$$

US-4188

(6)

एक चलित समतल दिये हुए समतल $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$ के समान्तर है तथा अक्षों को क्रमशः A, B, C पर मिलता है। सिद्ध कीजिए कि वृत्त ABC सतह पर स्थित है।

$$yz\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + zx\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + xy\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = 0$$

पर स्थित है।

Section-C

खण्ड-स

4. A variable plane at a constant distance p from the origin meets the axes in A, B and C . Show that the locus of the centroid of the triangle ABC is $x^{-2} + y^{-2} + z^{-2} = 9p^{-2}$.

एक चलित समतल जो मूलबिन्दु से नियत दूरी p पर है तथा अक्षों से A, B तथा C पर मिलता है। दिखाइये कि त्रिभुज ABC के केन्द्रक का बिन्दुपथ $x^{-2} + y^{-2} + z^{-2} = 9p^{-2}$ है।

Or/अथवा

Prove that the lines $\frac{x-9}{2} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-5}{1}$ and $6x + 4y - 5z = 4, x - 5y + 2z = 12$ are coplanar. Find also their point of intersection and the equation of the plane in which they lie.

4188

(7)

सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ $\frac{x-9}{2} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-5}{1}$ तथा $6x + 4y - 5z = 4, x - 5y + 2z = 12$ समतलीय हैं। इनका प्रतिच्छेद बिन्दु तथा उस समतल का समीकरण भी ज्ञात कीजिए जिस पर ये रेखाएँ स्थित हैं।

Section-D

खण्ड-द

6. Show that the reciprocal cone of the cone $\sqrt{fx} \pm \sqrt{gy} \pm \sqrt{hz} = 0$, is $fyz + gzx + hxy = 0$.
दिखाइये कि शंकु $\sqrt{fx} \pm \sqrt{gy} \pm \sqrt{hz} = 0$ का व्युत्क्रम शंकु $fyz + gzx + hxy = 0$ है।

Or/अथवा

7. Prove that $\text{div grad}(r^n) = n(n+1)r^{n-2}$.
सिद्ध कीजिए कि $\text{div grad}(r^n) = n(n+1)r^{n-2}$ है।

Section-E

खण्ड-इ

8. Find the equation of the tangent plane to the central conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ at the point (α, β, γ) .

TIS_4188

(8)

केन्द्रीय शांकव $ax^2+by^2+cz^2=1$ के बिन्दु (α, β, γ) पर स्पर्शी समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Or/अथवा

9. In any conic, prove that the sum of the reciprocals of two perpendicular focal chords is constant.
किसी शांकव में, सिद्ध कीजिए कि दो लम्बवत् नाभीय जीवाओं के व्युत्क्रमों का योग एक स्थिरांक होता है।

<https://universitynews.in>

US-4188-8