GD-2709

B.Sc./B.Sc. B.Ed. (Part-II)
Examination, March-April, 2023

MATHEMATICS

Paper - II

Differential Equations

Time : Three Hours] [*Maximum Marks* : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं **दो** भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer any **two** parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. (*a*) सिद्ध कीजिए कि :

$$2J'_n(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$$

Prove that :

$$2J'_n(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$$

(*b*) सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{d}{dx}(x J_n J_{n+1}) = x\left(J_n^2 - J_{n+1}^2\right)$$

Prove that :

$$\frac{d}{dx}(x J_n J_{n+1}) = x\left(J_n^2 - J_{n+1}^2\right)$$

(*c*) क्रिस्टोफल संकलन सूत्र

$$\sum_{r=0}^{n}(2r+1)P_r(x)P_r(y) = (n+1)\frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)}{x-y}$$

को स्थापित कीजिए।

Establish the Christoffel summation formula :

$$\sum_{r=0}^{n}(2r+1)P_r(x)P_r(y) = (n+1)\frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)}{x-y}$$

इकाई / Unit-II

2. (*a*) दर्शाइए कि

$$L\{\sinh at \cos at\} = \frac{a\left(p^2 - 2a^2\right)}{p^4 + 4a^4}$$

Show that

$$L\{\sinh at \cos at\} = \frac{a\left(p^2 - 2a^2\right)}{p^4 + 4a^4}$$

(*b*) हल कीजिए $(D+1)^2 y = t$ दिया गया है कि $y = -3$ जब $t = 0$ तथा $y = -1$ जब $t = 1$।

Solve $(D+1)^2 y = t$ given that $y = -3$ when $t = 0$ and $y = -1$ when $t = 1$.

(*c*) हल कीजिए $(D^3 + 1)y = 1$, $t > 0$ यदि $y = Dy = D^2 y = 0$ जब $t = 0$

Solve $(D^3 + 1)y = 1$, $t > 0$ if $y = Dy = D^2 y = 0$ when $t = 0$.

इकाई / Unit-III

3. (*a*) स्वेच्छ अचर *a*, *b*, *c* को बीजीय समीकरण

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

से विलोपन करके आंशिक अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

Form a partial differential equation, by eliminating arbitrary constants *a*, *b*, *c* from the algebraic equation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(*b*) सम्बन्ध $z = y^2 + 2f\left(\frac{1}{x} + \log y\right)$ से स्वेच्छ फलन *f* का विलोपन कीजिए।

Eliminate the arbitrary function *f* from the relation $z = y^2 + 2f\left(\frac{1}{x} + \log y\right)$.

(*c*) पूर्ण हल ज्ञात कीजिए :

$$q = px + p^2$$

Find the complete solution :

$$q = px + p^2$$

इकाई / Unit-IV

4. (*a*) समीकरण

$$\left(1 - x^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(1 - y^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial z}{\partial x} + 3x^2 y\frac{\partial z}{\partial y} - 2z = 0$$

का वर्गीकरण कीजिए।

Classify the equation :

$$\left(1-x^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(1-y^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}+3x^2y\frac{\partial z}{\partial y}-2z=0$$

(*b*) निम्नांकित आंशिक अवकल समीकरण का वर्गीकरण कीजिए और विहित (कैनोनिकल) रूप में समानयन कीजिए :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

Classify the following partial differential equation and reduce to canonical form :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

(*c*) हल कीजिए

$$(D^2-2DD'+D'^2)z=12xy$$

Solve

$$(D^2-2DD'+D'^2)z=12xy$$

इकाई / Unit-V

5. (*a*) मानलो एक फलनक $I[y(x)]$ वर्ग $C^1[0, 1]$ पर निम्नांकित रूप में परिभाषित है :

$$I[y(x)]=\int_0^1\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx$$

सिद्ध कीजिए कि

$$I[1]=1,\ I[x]=\sqrt{2}\quad \text{तथा}$$

$$I[x^2]=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\sinh^{-1}2$$

Let a functional $I[y(x)]$ defined on the class $C^1[0, 1]$ be given by

$$I[y(x)]=\int_0^1\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx$$

Prove that

$$I[1]=1,\ I[x]=\sqrt{2}\quad \text{and}$$

$$I[x^2]=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\sinh^{-1}2$$

(*b*) सिद्ध कीजिए कि फलनक $I[y(x)]=\int\sqrt{x\left(1+y'^2\right)}\,dx$ के चरम (extremals) परवलय होंगे।

Prove that the extremals of the functional $I[y(x)] = \int \sqrt{x(1+y'^2)}\, dx$ are parabolas.

(c) परवलय $y = x^2$ और सरल रेखा $x - y = 5$ के बीच की लघुत्तम दूरी ज्ञात कीजिए।

Find the shortest distance between the parabola $y = x^2$ and the straight line $x - y = 5$.
