Roll No. ....

ED–2650

B. A./B. Sc./B. Sc. B. Ed. (Part I) EXAMINATION, 2021

MATHEMATICS

Paper Third

(Vector Analysis and Geometry)

Time : Three Hours

Maximum Marks : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्न के कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Attempt any *two* parts of each questions. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ एवं $\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'$ व्युत्क्रम पद्धति के सदिश हो, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\vec{a} \times \vec{a}' + \vec{b} \times \vec{b}' + \vec{c} \times \vec{c}' = 0$$

P. T. O.

If $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ and $\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'$ are vectors of reciprocal system, then prove that :

$$\vec{a} \times \vec{a}' + \vec{b} \times \vec{b}' + \vec{c} \times \vec{c}' = 0$$

(ब) एक कण $x = 2t^2, y = t^2 - 4t, z = 3t - 5$ पर चल रहा है, जहाँ t समय है। समय $t = 1$ पर वेग एवं त्वरण के घटक सदिश $\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ की दिशा में ज्ञात कीजिए।

A particle is moving on $x = 2t^2, y = t^2 - 4t, z = 3t - 5$ where t is time At $t = 1$, find component of velocity and acceleration towards the direction of the vector $\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$.

(स) सिद्ध कीजिए कि :

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 0$$

Prove that :

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 0$$

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) दर्शाइए कि :

$$\int_1^2 \left[\vec{A} . \left(\vec{B} \times \vec{C} \right) \right] dt = 0$$

जहाँ $\vec{A} = t\hat{i} - 3\hat{j} + 2t\hat{k}$

$$\vec{B} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{C} = 3\hat{i} + t\hat{j} - \hat{k}$$

Show that :

$$\int_1^2 \left[\vec{A} . \left(\vec{B} \times \vec{C} \right) \right] dt = 0$$

where $\vec{A} = t\hat{i} - 3\hat{j} + 2t\hat{k}$

$$\vec{B} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{C} = 3\hat{i} + t\hat{j} - \hat{k}$$

(ब) यदि S गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ का पृष्ठ है तो गॉस डाइवर्जेन्स प्रमेय से सिद्ध कीजिए कि :

$$\iint_S \vec{r} . \hat{n}\, ds = 108\pi$$

If S is surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, then by Gouss divergence theorem, prove that :

$$\iint_S \vec{r} . \hat{n}\, ds = 108\pi$$

(स) स्टोक्स प्रमेय का सत्यापन कीजिए जब

$$\vec{F} = x^2\hat{i} + xy\hat{j}$$

जहाँ C, xy समतल में वर्ग की परिमाप है जिसकी भुजाएँ $x = 0, y = 0, x = a, y = a$ के अनुदिश है।

Verify Stokes' theorem which $\vec{F} = x^2\hat{i} + xy\hat{j}$ where C, is perimeter of a square in xy-plane whose sides are along $x = 0, y = 0, x = a, y = a$.

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) एक वृत्त, एक आयताकार अतिपरवलय $xy = 1$ को $xr, yr \; : r = 1, 2, 3, 4$ पर काटता है, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$x_1 \, x_2 \, x_3 \, x_4 = y_1 \, y_2 \, y_3 \, y_4 = 1$$

A circle cuts a rectangular hyperboloid $xy = 1$ at $xr, yr \; : r = 1, 2, 3, 4$. Prove that :

$$x_1 \, x_2 \, x_3 \, x_4 = y_1 \, y_2 \, y_3 \, y_4 = 1$$

(ब) शांकव का अनुरेखण कीजिए :

$$x^3 - 3xy + y^2 + 10x - 10y + 21 = 0$$

Trace the conic :

$$x^3 - 3xy + y^2 + 10x - 10y + 21 = 0$$

(स) वह शर्त ज्ञात कीजिए, जबकि सरल रेखा $\frac{l}{r} = \mathrm{A}\cos\theta + \mathrm{B}\sin\theta$ । शांकव $\frac{l}{r} = 1 + e\cos \; \theta - \theta'$ को स्पर्श करती है।

Find the condition, when straight line $\frac{l}{r} = \mathrm{A}\cos\theta + \mathrm{B}\sin\theta$ touches the conic $\frac{l}{r} = 1 + e\cos \; \theta - \theta'$.

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) सिद्ध कीजिए कि समतल

$$2x - 2y + z + 12 = 0,$$

गोले

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0$$

को स्पर्श करता है। स्पर्श बिन्दु ज्ञात कीजिए।

Prove that the plane

$$2x - 2y + z + 12 = 0,$$

touches the sphere

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0 .$$

Find the contact point.

(ब) सिद्ध कीजिए कि उस वर्ग शंकु का व्यापक समीकरण जो अक्षों से होकर जाता है।

$$fyz + gzx + hxy = 0$$

Prove that the general equation of a quadratic cone through the coordinate axes is :

$$fyz + gzx + hxy = 0$$

(स) उसक बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसके जनक $y = mx, z = nx$ के समांतर है तथा दीर्घवृत्त

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$$

को प्रतिच्छेद करता है।

Find the equation of cylinder whose generators are parallel to $y = mx, z = nx$ and intersect to the eclipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$$

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) वह प्रतिबंध ज्ञात कीजिए जब समतल $lx + my + nz = p$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ को स्पर्श करती है।

Find the condition that the plane $lx + my + nz = p$ touches the ellipsoid :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(ब) दीर्घवृत्तज :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

का समतल :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

द्वारा प्रतिच्छेद का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

Determine the area of intersection of the ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

by the plane :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

(स) अतिपरवलय :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$$

के बिन्दु $2, 3, -4$ से जाने वाले जनकों के समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of generators of the hyperboloid

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$$

passing through the points $2, 3, -4$.