Roll No. ....

ED–2759

B. A./B. Sc./B. Sc. B. Ed. (Part III) EXAMINATION, 2021

MATHEMATICS

Paper Second

(Abstract Algebra)

Time : Three Hours

Maximum Marks : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्न से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Attempt any *two* parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) सिद्ध कीजिए कि प्रतिचित्रण $a \to a^{-1}$ समूह G से G पर स्वाकारिता है यदि और केवल यदि G आबेली समूह है।

Prove that the mapping $a \to a^{-1}$ defined from a group G to G is automorphism if and only if G is abelian group.

P. T. O.

(ब) संयुग्मी सम्बन्ध की परिभाषा दीजिए। सिद्ध कीजिए कि किसी समूह G पर संयुग्मी सम्बन्ध एक तुल्यता सम्बन्ध होता है। 5

Define conjugate relation. Prove that the relation of 'conjugacy' on a group G is an equivalence relation.

(स) मान लीजिए A (G) समूह पर G पर परिभाषित स्वाकारिताओं का एक समूह है। तब दर्शाइये कि G पर परिभाषित आन्तरिक स्वाकारिताओं का समुच्चय :

$$I(G) = \quad f_a \in A(G) : a \in G$$

A (G) का एक उपसमूह होता है

Let A (G) is a group of automorphism defined on a group G. Then show that the set of inner automorphism on G :

$$I(G) = \quad f_a \in A(G) : a \in G$$

is a subgroup of A (G).

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) वलयों के लिए समाकारिता का मूल प्रमेय—"एक वलय R का प्रत्येक समाकारी प्रतिबिम्ब, किसी विभाग वलय से तुल्याकारी होता है।" सिद्ध कीजिए।

Fundamental theorem on homomorphism of rings–"Every homomorphic image of a ring R, is isomorphic to a quotient ring." Prove it.

(ब) गुणजावली की परिभाषा दीजिए। सिद्ध कीजिए कि किसी वलय (R, +, •) की दो गुणजावलियों का सर्वनिष्ठ भी R का एक गुणजावली होता है। 5

Define ideal. Prove that the intersection of two ideals of a ring (R, +, •) is also an ideal.

(स) क्षेत्र $I_6, +_6 \times_6$ पर निम्नलिखित बहुपदों का योग और गुणन ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = 5 + 4x + 3x^2 + 2x^3 \text{ तथा}$$

$$g(x) = 1 + 4x + 5x^2 + x^3$$

जहाँ $I_6\ 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Find the sum and product of following polynomials defined on the field $I_6, +_6 \times_6$, where $I_6\ 0, 1, 2, 3, 4, 5$ given that

$$f(x) = 5 + 4x + 3x^2 + 2x^3 \text{ and}$$

$$g(x) = 1 + 4x + 5x^2 + x^3$$

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) सिद्ध कीजिए कि किसी सदिश समष्टि V(F) के एक अतिरिक्त उपसमुच्चय W को V(F) का उपसमष्टि होने के लिए आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबंध यह है :

(i) $\propto, \beta \in W \Rightarrow \propto - \beta \in W$

(ii) $a \in F, \propto \in W \Rightarrow a \propto \in W$

Prove that the necessary and sufficient conditions for a non-empty subset W of V(F) to be a vector subspace of V(F) is that :

(i) $\propto, \beta \in W \Rightarrow \propto - \beta \in W$

(ii) $a \in F, \propto \in W \Rightarrow a \propto \in W$

(ब) रैखिकतः-स्वतंत्र सदिश की परिभाषा दीजिए। यदि $\propto, \beta, \gamma$ किसी सदिश समष्टि V(F) के रैखिकतः-स्वतंत्र सदिश हों तो दिखाइए कि : 5

$$\propto + \beta, \quad \beta + \gamma, \quad \gamma + \propto$$

भी रैखिकतः-स्वतंत्र सदिश होंगे; जहाँ F संमिश्र संख्याओं का क्षेत्र है।

Define linearly-independent vectors. If $\propto, \beta, \gamma$ are linearly-independent vectors of a vector-space V(F), then show that :

$$\propto + \beta, \quad \beta + \gamma, \quad \gamma + \propto$$

are also the linearly-independent vectors; where F is the field of complex numbers.

(स) सदिश समष्टि $V_3(R)$ के उपसमुच्चय S = { (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 0) } के सापेक्ष सदिश $\propto = (4, -3, 2)$ का निर्देशांक सदिश ज्ञात कीजिए।

Find the co-ordinate vector of $\propto = (4, -3, 2)$ with respect to the subset

S = { (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 0) } of vector space $V_3(R)$.

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) मान लीजिए क्षेत्र R पर $V_2(R)$ क्रमित-युग्मों का सदिश समष्टि है; तो सिद्ध कीएिज कि रूपान्तरण $f : V_2(R) \to V_2(R)$ जो $f(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$ से परिभाजित है, एक तुल्याकारिता है।

Let $V_2(R)$ is a vector space of ordered pairs of elements of field R. Then show that the transformation $f : V_2(R) \to V_2(R)$ defined by : $f(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$ is an isomorphism.

(ब) किसी आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ के आइगेन मानों के संगत सभी आइगेन सदिश ज्ञात कीजिए ? आइगेन समीकरण की परिभाषा लिखिए। 5

Find all the eigen vectors corresponding to eigen values of the matrix : $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Also define the eigen equation.

(स) लेग्रांज के समानयन विधि से द्विघाती-समघात :

$$q = x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3$$

को बहित-समघात में समानयन कीजिए और इसकी जाति, सूचकांक और चिन्हिका ज्ञात कीजिए।

Using Lagrange's method, reduce the given quadratic form :

$$q = x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3$$

into canonical form; and find its rank, index and signature.

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) यदि $\propto$ तथा β किसी आन्तर गुणन समष्टि V(F) में कोई दो सदिश हों तो सिद्ध कीजिए कि

$$\|\propto\beta\|^2 + \|\propto - \beta\|^2 = 2\|\propto\|^2 + 2\|\beta\|^2$$

तथा परिणाम की ज्यामितीय व्याख्या कीजिए।

If $\propto$ and β are two vectors of an inner product space V(F), then prove that

$$\|\propto\beta\|^2 + \|\propto - \beta\|^2 = 2\|\propto\|^2 + 2\|\beta\|^2$$

and give the geometrical interpretation of the result.

(ब) आन्तर गुणन समष्टि की परिभाषा लिखिए। माना कि V(C) इकाई अन्तराल $0 \le t \le 1$ पर सभी सतत् संमिश्र मानक फलनों का सदिश समष्टि है। यदि $f(t), g(t), \in V$ तथा

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_0^1 f(t), \overline{g(t)}\, dt$$

तो सिद्ध कीजिए कि V आन्तर-गुणन समष्टि है। 5

Define inner-product space. Let V(C) be a vector space of all continuous norm functions on the unit interval $0 \le t \le 1$. If $f(t), g(t), \in V$ and

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_0^1 f(t), \overline{g(t)}\, dt$$

then prove that V is an inner-product space.

(स) ग्राम-शिमट विधि से $V_4(R)$ के निम्न एक घातीय स्वतंत्र सदिश के समुच्चय S का अभिलाम्बिकीकरण कीजिए :

$$S = \beta_1, \beta_2, \beta_3$$

जहाँ

$\beta_1 = 1, 0, 1, 1$, $\beta_2 = -1, 0, -1, 1$,

$\beta_3 = 0, -1, 1, 1$.

Using Gram-Schmidt method, make the orthonormalization of vectors of linearly independent setson $V_4(R)$, for $S = \beta_1, \beta_2, \beta_3$ when :

$\beta_1 = 1, 0, 1, 1$, $\beta_2 = -1, 0, -1, 1$,

$\beta_3 = 0, -1, 1, 1$.