Roll No. ....

ED–2758

B. A./B. Sc./B. Sc. B. Ed. (Part-III) EXAMINATION, 2021

MATHEMATICS

Paper First

(Analysis)

Time : Three Hours

Maximum Marks : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्न से दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Attempt any *two* parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) दर्शाइये कि निम्नलिखित श्रेणी अभिसारी है :

$$2-\frac{3}{2\sqrt{2}}+\frac{4}{3\sqrt{3}}-\frac{5}{4\sqrt{4}}+.........$$

Show that the following series is convergent :

$$2-\frac{3}{2\sqrt{2}}+\frac{4}{3\sqrt{3}}-\frac{5}{4\sqrt{4}}+.........$$

P. T. O.

(ब) दर्शाइये कि निम्नलिखित फलन मूल बिन्दु पर संतत है, किन्तु अवकलनीय नहीं है :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & \text{यदि } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \quad , & \text{अन्यथा}\end{cases}$$

Show that the following function is continuous but not differentiable at origin :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & \text{if } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \quad , & \text{otherwise}\end{cases}$$

(स) फलन :

$$f(x)=x^2,\ -\pi<x<\pi$$

तथा $f(x+2\pi)=f(x)$

की फूरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए।

Find the Fourier series of function :

$$f(x)=x^2,\ -\pi<x<\pi$$

and $f(x+2\pi)=f(x)$.

इकाई—2

(UNIT—2)

2\. (अ) यदि :

$$f(x)=x^2,\ x\in[0,a],\ a>0$$

दर्शाइये कि :

$$f\in \mathrm{R}\ [0,a]$$

तथा $$\int_0^a x^2\,dx=\frac{a^3}{3}$$

If

$$f(x) = x^2,\ x \in [0, a],\ a > 0$$

show that :

$$f \in \mathrm{R}\ [0, a]$$

and $$\int_0^a x^2\, dx = \frac{a^3}{3}$$

(ब) निम्नलिखित समाकल के अभिसरण के लिए परीक्षण कीजिए :

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx$$

Test the convergence of the following :

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx$$

(स) यदि $f(x,t)$ सभी $x \geq a$ और $t \in [\alpha, \beta]$ के लिए संतत है तथा $\phi(x)$, $[a, \xi]$ पर सभी $\xi > a$ के लिए परिबद्ध और समाकलनीय है, तब सिद्ध कीजिए :

$$\int_\alpha^\beta \int_a^\infty f(x,t)\phi(x)\, dx\ \ dx = \int_a^\infty f(x,t)\phi(x)\, dt\, dx$$

If $f(x,t)$ is continuous for all $x \geq a$ and $t \in [\alpha, \beta]$ and $\phi(x)$ is bounded and differentiable in $[a, \xi]$ for all $\xi > a$, then prove that :

$$\int_\alpha^\beta \int_a^\infty f(x,t)\phi(x)\, dx\ \ dx = \int_a^\infty f(x,t)\phi(x)\, dt\, dx$$

P. T. O.

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) दर्शाइये कि $\arg\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}\right)$ आरगाँ समतल में z_2 को z_1 से और z_4 को z_3 से मिलाने वाली रेखाओं के बीच का कोण है।

Show that $\arg\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}\right)$ is angle between the lines joint the points z_2 to z_1 and z_4 to z_3 in argand plane.

(ब) सिद्ध कीजिए कि फलन

$$u = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$$

लाप्लास समीकरण को संतुष्ट करता है और संगत विश्लेषिक फलन $u + iv$ ज्ञात कीजिए।

Prove that the function :

$$u = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$$

satisfies Laplace's equation and find corresponding analytics function $u + iv$.

(स) रूपान्तरण $W = T_1(z) = \frac{z+1}{z+3}$, $W = T_g(z) = \frac{z}{z+2}$ लेकर निम्नलिखित का मान बताइए :

$$T_1^{-1}(W),\ T_2^{-1}(W),\ T_2\,T_1(z),\ T_1T_2(z),\ T_2^{-1}T_1(z)$$

Consider the transformation $W = T_1(z) = \dfrac{z+1}{z+3}$,

$W = T_g(z) = \dfrac{z}{z+2}$ find value of the following :

$T_1^{-1}(W)$, $T_2^{-1}(W)$, $T_2 T_1(z)$, $T_1 T_2(z)$, $T_2^{-1} T_1(z)$

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) सिद्ध कीजिए कि किसी दूरिक समष्टि में परिमित संख्या में विवृत्त समुच्चयों का सर्वनिष्ठ विवृत्त होता है।

Prove that in a metric space, the intersection of a finite number of open sets is open.

(ब) सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित प्रतिचित्रण $f : R^3 \to R^3$ (R^3, d) पर एक संकुचन प्रतिचित्रण है।

$$f(x) = \frac{1}{4}x \ \forall\, x \in R^3$$

Prove that the following mapping $f : R^3 \to R^3$, is a contraction in (R^3, d).

$$f(x) = \frac{1}{4}x \ \forall\, x \in R^3$$

(स) सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

Prove that $\sqrt{3}$ is an irrational number.

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) लिण्डेलॉफ प्रमेय लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Lindelofs Theorem.

P. T. O.

(ब) मान लो (X, d) तथा (Y, P) दो दूरिक समष्टियाँ हैं तथा $f : X \to Y$ एक संतत फलन है। यदि f एकैकी आच्छादक है और X संतत है तब सिद्ध कीजिए f^{-1} संतत है।

(स) मान लो $X = [-1, 1]$ निरपेक्ष मान दूरिक से सज्जित है, $Y = R$ साधारण दूरिक समष्टि है और मान लो $f : X \to R$, $f(x) = x^2 + 7x \;\forall\; x \in X$ से परिभाषित है तब सिद्ध कीजिए कि f एक समान संतत है।

Let $X = [-1, 1]$ is equipped with absolute value metric, Y = R is usual metric space and Let $f : X \to R$ defined by $f(x) = x^2 + 7x \;\forall\; x \in X$ then prove that *f* is uniformly continuous.