



1578

B.A./B.Sc. (Part-I) Examination, 2023
MATHEMATICS
Third Paper
(Geometry and Vector Calculus)

Duration of Examination: 3 Hours
परीक्षा की अवधि: 3 घण्टा

Max. Marks: 75 for Science
68 for Arts
पूर्णांक: 75 विज्ञान के लिए
68 कला के लिए

Instructions to the Candidates:
परीक्षार्थी के लिए निर्देश:-

Part-A (Compulsory) / भाग-अ (अनिवार्य)

Answer all ten questions (upto 50 words each). Each question carries equal marks.

सभी दस प्रश्न करना अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 50 शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं। (Marks-15)

Part-B (Compulsory) / भाग-ब (अनिवार्य)

Answer all five questions (upto 100 words each). Each question carries equal marks.

सभी पाँच प्रश्न कीजिये। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 100 शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं। (Marks-15)

Part-C / भाग-स

Answer any three questions (upto 400 words each). Selecting one question from each Unit. Each question carries equal marks.

प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न चुनते हुए, कुल तीन प्रश्न कीजिये। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 400 शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं। (Marks-45)

Part-A
भाग-अ

- 1- Define centre of a conic.
शांकव के केन्द्र को परिभाषित कीजिए।
- 2- Write the equations of the asymptotes for the conic.
 $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$
शांकव $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ के लिए अनन्तस्पर्शियों के समीकरण को लिखिए।
- 3- Define Director Circle of the conic.
शांकव के नियामक वृत्त को परिभाषित कीजिए।
- 4- Write the equation of the chord of a circle $r = 2a \cos \theta$ joining two points $P(r_1, \theta_1)$ and $Q(r_2, \theta_2)$ on it.
वृत्त $r = 2a \cos \theta$ पर स्थित दो बिन्दुओं $P(r_1, \theta_1)$ तथा $Q(r_2, \theta_2)$ को मिलाने वाली जीवा का समीकरण लिखिए।
- 5- Write the equation of a sphere whose centre is $C(a, b, c)$ and radius is r .
उस गोले का समीकरण लिखिए जिसका केन्द्र $C(a, b, c)$ तथा त्रिज्या r है।



- 6- Define right circular cylinder.
लम्बवृत्तीय बेलन को परिभाषित कीजिए।
- 7- Define Conjugate points.
संयुग्मी बिन्दु को परिभाषित कीजिए।
- 8- Define Enveloping Cylinder.
अन्वालोपी बेलन को परिभाषित कीजिए।
- 9- Define Divergence of a Vector point function.
सदिश बिन्दु फलन के अपसरण को परिभाषित कीजिए।
- 10- Write the statement of Green's theorem.
ग्रीन प्रमेय के कथन को लिखिए।

Part-B / भाग-ब

- 11- What conic does the following equation represent? Find its centre and the equation to the conic referred to the centre as origin.
 $13x^2 - 18xy + 37y^2 + 2x + 14y - 2 = 0$
निम्न समीकरण कौन से शांकव को निरूपित करता है? इसके केन्द्र के निर्देशांक तथा इसके केन्द्र को मूल बिन्दु मानकर शांकव का समीकरण ज्ञात कीजिए:-
 $13x^2 - 18xy + 37y^2 + 2x + 14y - 2 = 0$
- 12- Find the condition that the straight line $\frac{l}{r} = A \cos \theta + B \sin \theta$ may touch the circle $r = 2a \cos \theta$
वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए जबकि सरल रेखा $\frac{l}{r} = A \cos \theta + B \sin \theta$ वृत्त $r = 2a \cos \theta$ को स्पर्श करें।
- 13- A sphere of constant radius k passes through the origin and meets the axes in A,B,C; Prove that the centroid of the triangle ABC lies on the sphere.
 $9(x^2 + y^2 + z^2) = 4k^2$
अचर त्रिज्या k का गोला मूल बिन्दु से गुजरता है एवं निर्देशी अक्षों को A,B,C पर काटता है। सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज ABC के केन्द्रक का बिन्दुपथ $9(x^2 + y^2 + z^2) = 4k^2$ है।
- 14- Find the equation of the right circular cone whose vertex is $(0,0,0)$, axis is OX and semi-vertical angle is α .
उस लम्बवृत्तीय शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष $(0,0,0)$, अक्ष OX तथा अर्धशीर्ष कोण α है।



15- For the function $f = \frac{y}{x^2 + y^2}$; find the magnitude of the directional derivatives making an angle 30° with the positive x-axis at the point (0,1).

फलन $f = \frac{y}{x^2 + y^2}$ के लिए बिन्दु (0,1) पर दिक् अवकलज का परिमाण ज्ञात कीजिए जो कि x - अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ 30° का कोण बनाता है।

Part-C / भाग-स

Unit-I / इकाई-I

16- (a) Find the lengths and equations of axes of the following conic: $2x^2 + 5xy + 2y^2 = 1$

निम्न शांकव की अक्षों के समीकरण तथा लम्बाइयों ज्ञात कीजिए:- $2x^2 + 5xy + 2y^2 = 1$

(b) Find the Co-ordinates of the centre of the conic $36x^2 + 24xy + 29y^2 - 72x + 126y + 81 = 0$. Also find the equation of this conic referred to centre as origin in the standard form.

शांकव $36x^2 + 24xy + 29y^2 - 72x + 126y + 81 = 0$ के केन्द्र के निर्देशांक ज्ञात कीजिए। केन्द्र को मूल बिन्दु मानकर उस शांकव के मानक रूप का समीकरण भी ज्ञात कीजिए।

OR / अथवा

(a) Show that the equations $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ and $\frac{l}{r} = -1 + e \cos \theta$ represent the same conic.

सिद्ध कीजिए कि समीकरण $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ तथा $\frac{l}{r} = -1 + e \cos \theta$ एक ही शांकव को निरूपित करते हैं।

(b) If PSP' is a focal chord of the conic, then prove that the tangent at P and P' intersect on the directrix. यदि PSP' किसी शांकव की नाभिय जीवा है, तो सिद्ध कीजिए कि बिन्दु P तथा P' पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ नियता पर परस्पर काटती हैं।

Unit-II / इकाई-II

17- (a) Find the equation of the sphere which passes through the points (1,0,0); (0,1,0) and (0,0,1) and has its radius as small as possible.

बिन्दु (1,0,0); (0,1,0) और (0,0,1) से गुजरने वाले उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या न्यूनतम हो।

(b) Find the enveloping cone of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ with its vertex at (1,1,1).

गोले $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ के उस अन्वालोपी शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष बिन्दु (1,1,1) है।

OR / अथवा



- (a) Find the equation of a right circular cylinder whose axis is $\frac{(x-2)}{2} = \frac{(y-1)}{1} = \frac{z}{3}$ and which passes through (0,0,1)

उस लम्ब वृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी अक्ष $\frac{(x-2)}{2} = \frac{(y-1)}{1} = \frac{z}{3}$ तथा जो बिन्दु (0,0,1) से गुजरता है।

- (b) If the section of the enveloping cone of the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ whose vertex is P. by the plane $z = 0$ is a rectangular hyperbola, then find the locus of P.

यदि दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ के शीर्ष P वाले अन्वालोपी शंकु का तल $z = 0$ से परिच्छेद आयतीय अतिपरवलय है, तो P का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

Unit-III / इकाई-III

- 18- (a) Find the equations of the tangent plane and the normal to the surface $xyz = 4$ at the point (1,2,2).
पृष्ठ $xyz = 4$ के बिन्दु (1,2,2) पर स्पर्श तल एवं अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए।

- (b) If $r = |\vec{r}|$, where $\vec{r} = xi + yj + zk$; then prove that $\nabla^2 f(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$

यदि $r = |\vec{r}|$, जहाँ $\vec{r} = xi + yj + zk$, तो सिद्ध कीजिए कि $\nabla^2 f(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$.

OR / अथवा

- (a) Find the total work done in moving a particle in a force field given by $F = 3xyi - 5zj + 10k$ along the curve $x = t^2 + 1, y = 2t^2, z = t^3$ from $t = 1$ to 2.

एक बल $F = 3xyi - 5zj + 10k$ के क्षेत्र में एक कण को वक्र $x = t^2 + 1, y = 2t^2, z = t^3$ के अनुदिश $t = 1$ से 2 तक ले जाने में किया गया कुल कार्य ज्ञात कीजिए।

- Use Green's theorem to evaluate $\int_C \{(y - \sin x)dx + \cos x dy\}$ where C is the triangle enclosed by the line $y = 0 = x, x = \pi/2$ and $y = 2x/\pi$

ग्रीन प्रमेय का प्रयोग कर $\int_C \{(y - \sin x)dx + \cos x dy\}$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ C रेखाओं $y = 0 = x, x = \pi/2$ तथा $y = 2x/\pi$ से परिवद्ध त्रिभुज है।
