



1597

**B.A./B.Sc. (Part-II) Examination, 2023**  
**MATHEMATICS**  
**First Paper**  
**(Abstract Algebra)**

**Duration of Examination: 3 Hours**  
परीक्षा की अवधि: 3 घण्टा

**Max. Marks: 75 for Science**

**66 for Arts**

पूर्णांक: 75 विज्ञान के लिए  
66 कला के लिए

**Instructions to the Candidates:**  
परीक्षार्थी के लिए निर्देश:-

**Part-A (Compulsory) / भाग-अ (अनिवार्य)**

Answer all ten questions (upto 50 words each). Each question carries equal marks  
सभी दस प्रश्न करना अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 50 शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं। (Marks-15)

**Part-B (Compulsory) / भाग-ब (अनिवार्य)**

Answer all five questions (upto 100 words each). Each question carries equal marks.  
सभी पाँच प्रश्न कीजिये। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 100 शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं। (Marks-15)

**Part-C / भाग-स**

Answer any three questions (upto 400 words each). Selecting one question from each Unit. Each question carries equal marks.

प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न चुनते हुए, कुल तीन प्रश्न कीजिये। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 400 शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं। (Marks-45)

**Part-A**

**भाग-अ**

1- Find the order of each element of the group  $(\{0,1,2,3,4\}, +_5)$

समूह  $(\{0,1,2,3,4\}, +_5)$  में प्रत्येक अवयव की कोटि ज्ञात करो।

2- Find all the generators of the cyclic group  $\{a, a^2, a^3, \dots, a^6 = e\}$

चक्रीय समूह  $\{a, a^2, a^3, \dots, a^6 = e\}$  के सभी जनक ज्ञात करो।

3- State Euler's theorem.

आयलर प्रमेय का कथन करो।

4- Define proper & improper subgroups.

उचित एवं विषम उपसमूहों को परिभाषित करो।

5- Give an example of non abelian finite group.

अक्रमबन्धनमेय परिमित समूह का उदाहरण दीजिये।



6- Write the order of symmetric group  $S_n$   
सममित समूह  $S_n$  की कोटि लिखो।

7- Define endomorphism.  
अन्तराकारिता को परिभाषित करो।

8- Define Unique Factorization Domain.  
अद्वितीय गुणनखण्डन प्रान्त को परिभाषित करो।

9- Define Simple ring.  
सरल लिंग को परिभाषित करो।

10- Define Polynomial ring.  
बहुपद वलय को परिभाषित करो।

Part-B / भाग-ब

11- If  $a, b$  are elements of a group  $G$  then show that the equation  $ax=b$  have unique solutions in  $G$ .  
यदि  $a, b$  समूह  $G$  के अवयव हों तब सिद्ध करो कि समीकरण  $ax = b$  के  $G$  में अद्वितीय हल होते हैं।

12- Prove that intersection of any two normal subgroups of a group is a normal sub group.  
सिद्ध करो समूह के किन्हीं दो प्रसामान्य उपसमूहों का सर्वनिष्ठ उस समूह का प्रसामान्य उपसमूह होता है।

13- Prove that the set of all cosets of  $H \triangleleft G$  is a group with respect to multiplication of cosets defined as  $H_a H_b = H_{ab}, \forall a, b \in G$   
सिद्ध करो कि समूह  $G$  के प्रसामान्य उपसमूह  $H$  के सभी सह समुच्चयों का समुच्चय, सहसमुच्चयों के गुणा के लिए समूह होता है। जहाँ  $H_a H_b = H_{ab}, \forall a, b \in G$  H

14- If (यदि)  $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \sigma = (134)(56)(2789)$  then find (तब ज्ञात करो।)

- (i)  $\sigma^{-1}p\sigma$
- (ii)  $\sigma(e)$
- (iii) Whether  $e$  is an even or odd permutation?  
 $p$  सम क्रमचय है या विषम क्रमचय?



15- Prove that the polynomial  $(X^2 + 1)$  is irreducible over the field  $(Z_7, +_7, \cdot_7)$  of integer moduls 7.  
सिद्ध करो कि क्षेत्र  $(Z_7, +_7, \cdot_7)$  पूर्णाकीय मोड्यूलो 7 पर बहुपद  $(X^2 + 1)$  अखण्डनीय है।

**Part-C / भाग-स**

**Unit-I / इकाई-I**

16- If  $G = \{(a, b) : a, b \in R, a \neq 0\}$  and 0 is the operation defined in G as follows, then show that  $(G, 0)$  is a non abelian group.  $(a, b) 0 (c, d) = (ac, bc + d)$

यदि  $G = \{(a, b) : a, b \in R, a \neq 0\}$  तथा 0 समूह G में निम्न प्रकार से परिभाषित संक्रिया हो तो सिद्ध करो कि  $(G, 0)$  अक्रयविनिमेय (अनआबेली) समूह होगा।

$$(a, b) 0 (c, d) = (ac, bc + d)$$

**OR / अथवा**

Prove that - A non void subset H of a group G is a subgroup iff  $a \in H, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$   
सिद्ध करो कि समूह G का कोई अरिक्त उपसमुच्चय H एक उपसमूह होगा यदि  $a \in H, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$

**Unit-II / इकाई-II**

17- Prove that the set  $A_n$  of all even permutations of degree n is a group of order  $\frac{n!}{2}$  for the product of permutations.

सिद्ध करो कि n अशांक के सभी सम क्रमचर्यों का समुच्चय  $A_n$  क्रमचय गुणा संक्रिया के लिए  $\frac{n!}{2}$  कोटि का समूह होता है।

**OR / अथवा**

Prove that every homomorphic image of a group G is isomorphic to some quotient group of G.  
सिद्ध करो कि समूह G का प्रत्येक समाकारी प्रतिबिम्ब, G के किसी विभाग समूह के तुल्यकारी होता है।

**Unit-III / इकाई-III**

18- Let  $f$  be a ring homomorphism from  $(R, +, \times)$  to  $(R', \oplus, \odot)$  then prove that the kernel of  $f$  i.e.  $(Ker f, +, \times)$  is an ideal of  $(R, \oplus, \odot)$



OR / अथवा

Prove that an ideal  $I$  of a commutative ring  $R$  with unity is prime iff  $R/I$  is an integral domain.

सिद्ध करो कि किसी कम विनिमेय तत्समकी वलय  $R$  की कोई गुणजावली  $I$  अभाज्य गुणजावली होती है यदि  $R/I$  एक पूर्णाकीय प्रांत है।

\*\*\*\*\*

<https://universitynews.in>