



A-925

[Total No. of Questions : 18

B.A. B.Sc. (Part - II) EXAMINATION - 2022

MATHEMATICS

First Paper

(Abstract Algebra)

Duration : 90 Minutes]

[Max. Marks : 75 for Science

66 for Arts

अवधि : 90 Minutes]

[पूर्णांक : 75 for Science

66 for Arts

Instructions to the candidates :

Attempt questions to the extent of 50% of maximum marks of the question paper. Any question with or without 'or' or from any unit/section/part may be chosen.

प्रश्न पत्र के किसी भी इकाई/भाग/खंड में से स्वेच्छा से इस प्रकार प्रश्नों का चयन करें कि प्रश्न पत्र के पूर्णांक में से अधिकतम 50% अंकों के प्रश्न हल हो सकें। 'अथवा' के साथ दिए प्रश्नों में भी किसी प्रकार की बाध्यता नहीं है।

Part - A [Marks : 15] Each question carries equal marks. (50 words each)

भाग - अ [अंक : 15] प्रत्येक प्रश्न के समान अंक हैं। (प्रत्येक 50 शब्दों में)

Part - B [Marks : 15] Each question carries equal marks. (100 words each)

भाग - ब [अंक : 15] प्रत्येक प्रश्न के समान अंक हैं। (प्रत्येक 100 शब्दों में)

Part - C [Marks : 45] Each question carries equal marks. (400 words each)

भाग - स [अंक : 45] प्रत्येक प्रश्न के समान अंक हैं। (प्रत्येक 400 शब्दों में)

PART - A / भाग - अ

Q1) Define Commutative group.

क्रमविलिमेय समूह परिभाषित कीजिए।

Q2) Define normalizer of a group.

किसी समूह के प्रसामान्यक को परिभाषित कीजिए।

Q3) State Lagrange's theorem.

लेग्रेंज प्रमेय का प्रकथन लिखिए।

Q4) Prove that the identity element in a group is unique.

सिद्ध कीजिए कि एक समूह में तत्समक अवयव अद्वितीय होता है।

Q5) Define quotient group.

विभाग समूह को परिभाषित कीजिए।

Q6) Find the characteristic of a ring  $[Z_4, +_4, \cdot_4]$ .

बलय  $[Z_4, +_4, \cdot_4]$  का अभिलक्षण ज्ञात कीजिए।



- Q7) Define even and odd permutations.  
सम तथा विषम क्रमचय की परिभाषा दीजिये।
- Q8) Define Skew field.  
विषम क्षेत्र परिभाषित कीजिए।
- Q9) Define ring homomorphism.  
वलय समाकारिता परिभाषित कीजिए।
- Q10) Define prime ideal.  
अभाज्य गुणजावली को परिभाषित कीजिए।

PART - B / भाग - ब

- Q11) If  $H$  is a subgroup of  $G$  and  $(G:H)=2$  Prove that  $aH=Ha, \forall a \in G$ .  
यदि समूह  $G$  का एक उपसमूह  $H$  है और  $(G:H)=2$  है तो सिद्ध कीजिए की  $aH=Ha, \forall a \in G$ .
- Q12) Prove that the intersection of any two normal subgroup of a group is a normal subgroup.  
सिद्ध कीजिए कि किसी ग्रुप के किन्हीं दो विशिष्ट उपसमूहों का सर्वश्रेष्ठ उस समूह का एक विशिष्ट उपसमूह होता है।
- Q13) Prove that the characteristic of an integral domain is either zero or a prime number.  
सिद्ध कीजिये कि पूर्णाकीय प्रान्त का अभिलक्षण या तो शून्य है या अखण्डनीय संख्या है।
- Q14) Prove that the order of a cycle of length  $r$  is  $r$ .  
सिद्ध कीजिए कि  $r$  लम्बाई के चक्र की कोटी  $r$  होती है।
- Q15) Prove that an ideal  $I$  of a commutative ring  $R$  with unity is Prime iff  $R/I$  is an integral domain.  
सिद्ध कीजिए कि किसी क्रमविनिमेय तत्समकी वलय  $R$  की कोई गुणजावली  $I$  अभाज्य गुणजावली होती है यदि और केवल यदि  $R/I$  एक पूर्णाकीय प्रान्त है।

PART - C / भाग - स

UNIT - I / इकाई - I

- Q16) Prove that the union of Two subgroups of a group  $G$  is a subgroup iff one is contained in the other.  
सिद्ध कीजिए कि किसी समूह  $G$  के दो उपसमूहों का संघ एक उपसमूह है यदि और केवल यदि एक दुसरे में अंतर्बिष्ट हो।

OR/अथवा

Prove that every finite group is isomorphic to some permutation group.  
सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित समूह किसी क्रमचय समूह के तुल्यकारी होता है।



UNIT - II / इकाई - II

**Q17)** State and prove fundamental theorem on homomorphism.  
समाकारिता के मूलभूत प्रमेय का कथन लिख कर सत्यापित कीजिए।  
OR/अथवा

Find  $\sigma^{-1}\rho\sigma$  when  $\rho = \begin{pmatrix} 123456789 \\ 789645231 \end{pmatrix}$  and  $\sigma = (1,3,4)(5,6)(2,7,8,9)$ . Also express that permutation  $\rho$  as a product of disjoint cycles. Find whether  $\rho$  is an even or odd permutation.

$\sigma^{-1}\rho\sigma$  ज्ञात कीजिये जबकि  $\rho = \begin{pmatrix} 123456789 \\ 789645231 \end{pmatrix}$  तथा  $\sigma = (1,3,4)(5,6)(2,7,8,9)$  क्रमचय  $\rho$  को असंयुक्त चक्रों के गुणनफल में व्यक्त करके बताइये कि  $\rho$  सम क्रमचय है अथवा विषम।

UNIT - III / इकाई - III

**Q18)** Prove that the set of all real number of the form  $m + n\sqrt{2}$ , where  $m$  and  $n$  are integers with ordinary addition and multiplication forms a ring. Is it a field.

सिद्ध कीजिए कि  $m + n\sqrt{2}$  जहाँ  $m$  तथा  $n$  पूर्णांक हों, आकार की वास्तविक संस्थाओं का समुच्चय संख्याओं के योग एवं गुणन के लिए बलय हैं। क्या यह क्षेत्र हैं?

OR/अथवा

If  $f(x) = 3 + 5x - 7x^2$  and  $g(x) = 5 + 2x - 7x^3$  are any two polynomials over the ring  $(Z_8, +_8, \cdot_8)$  then find  $f(x) \cdot g(x)$ .  
यदि बलय  $(Z_8, +_8, \cdot_8)$  पर बहुपद  $f(x) = 3 + 5x - 7x^2$  तथा  $g(x) = 5 + 2x - 7x^3$  कोई दो बहुपद हों तो  $f(x) \cdot g(x)$  ज्ञात कीजिये।

