

GD-2708

B.Sc./B.Sc. B.Ed. (Part-II)
Examination, March-April, 2023

MATHEMATICS

Paper - I

Advanced Calculus

Time : Three Hours] [Maximum Marks : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं दो भागों को हल कीजिए।
सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer any two parts from each question. All
questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. (a) सिद्ध कीजिए कि एक निरपेक्ष अभिसारी श्रेणी
अभिसारी होती है, किन्तु विलोम सत्य नहीं
है।

Prove that an absolute convergence series
is convergent, but converse is not true.

(b) मान ज्ञात कीजिए :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{2}{1}\right)^1 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{4}{3}\right)^3 \dots \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \right]^{1/n}$$

Find the value :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{2}{1}\right)^1 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{4}{3}\right)^3 \dots \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \right]^{1/n}$$

(c) निम्न श्रेणी के अभिसरण का परीक्षण कीजिए :

$$\frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots, x > 0$$

Test the convergence of the following
series :

$$\frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots, x > 0$$

(3)

इकाई / Unit-II

2. (a) निम्नलिखित का $x=0$ पर सांतत्यता परीक्षण कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{1/x} - 1}{e^{1/x} + 1}, & \text{जब } x \neq 0 \\ 0, & \text{जब } x = 0 \end{cases}$$

Test the continuity of the following function at $x=0$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{1/x} - 1}{e^{1/x} + 1}, & \text{when } x \neq 0 \\ 0, & \text{when } x = 0 \end{cases}$$

- (b) लैग्रान्ज का मध्यमान प्रमेय लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove the Lagrange's mean value theorem.

- (c) फलन $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ के लिए रोले प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

Verify Rolle's theorem for the function :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

(4)

इकाई / Unit-III

3. (a) फलन $f(x, y) = x^2 + xy - y^2$ का $(x-1)$ और $(y+2)$ की घातों में प्रसार कीजिए।

Expand the function $f(x, y) = x^2 + xy - y^2$ in powers of $(x-1)$ and $(y+2)$.

- (b) यदि $u = x + y - z$, $v = x - y + z$, $w = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz$, तो दर्शाइए कि

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 0$$

If $u = x + y - z$, $v = x - y + z$, $w = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz$, then show that

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 0$$

- (c) माना $z = f(x, y)$, जहाँ $x = e^u + e^{-v}$ एवं $y = e^{-u} - e^{-v}$, तब सिद्ध कीजिए :

$$\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}$$

(5)

<https://universitynews.in/>

Let $z = f(x, y)$, where $x = e^u + e^{-v}$ and $y = e^{-u} - e^{-v}$, then prove that

$$\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}$$

इकाई / Unit-IV

4. (a) सरल रेखाओं

$x \cos \alpha + y \sin \alpha = l \sin \alpha \cos \alpha$ के कुल का अन्वालोप ज्ञात कीजिए, जहाँ α प्राचल है।

Find the envelope of the family of straight lines $x \cos \alpha + y \sin \alpha = l \sin \alpha \cos \alpha$, where α is parameter.

(b) दर्शाइए कि वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ के केन्द्रज का समीकरण $(x+y)^{2/3} + (x-y)^{2/3} = 2a^{2/3}$ है।

Show that the evolute of the curve

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \text{ is}$$

$$(x+y)^{2/3} + (x-y)^{2/3} = 2a^{2/3}$$

(c) यदि $u = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x+y)$ हो, तो u का उच्चिष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

(6)

If $u = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x+y)$, then find the maximum value of u .

इकाई / Unit-V

5. (a) सिद्ध कीजिए:

$$\beta(m, n) = \frac{\sqrt{m} \sqrt{n}}{\sqrt{m+n}}$$

Prove that:

$$\beta(m, n) = \frac{\sqrt{m} \sqrt{n}}{\sqrt{m+n}}$$

(b) मान ज्ञात कीजिए:

$$\int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y} e^x (y+2z) dx dy dz$$

Evaluate:

$$\int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y} e^x (y+2z) dx dy dz$$

(c) द्विक समाकल में समाकलन का क्रम बदलिए:

$$\int_0^{2a} \int_{x^2/4a}^{3a-x} f(x, y) dx dy$$

(7)

Change the order of integration in the double integral :

$$\int_0^{2a} \int_{x^2/4a}^{3a-x} f(x, y) dx dy$$

https://universitynews.in