

GD-2709

B.Sc./B.Sc. B.Ed. (Part-II)
Examination, March-April, 2023

MATHEMATICS

Paper - II

Differential Equations

Time : Three Hours] [Maximum Marks : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं दो भागों को हल कीजिए।
सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer any two parts from each question. All
questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. (a) सिद्ध कीजिए कि :

$$2J'_n(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$$

Prove that :

$$2J'_n(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$$

(b) सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{d}{dx}(x J_n J_{n+1}) = x(J_n^2 - J_{n+1}^2)$$

Prove that :

$$\frac{d}{dx}(x J_n J_{n+1}) = x(J_n^2 - J_{n+1}^2)$$

(c) क्रिस्टोफल संकलन सूत्र

$$\sum_{r=0}^n (2r+1) P_r(x) P_r(y) = (n+1) \frac{P_{n+1}(x) P_n(y) - P_{n+1}(y) P_n(x)}{x-y}$$

को स्थापित कीजिए।

Establish the Christoffel summation formula :

$$\sum_{r=0}^n (2r+1) P_r(x) P_r(y) = (n+1) \frac{P_{n+1}(x) P_n(y) - P_{n+1}(y) P_n(x)}{x-y}$$

(3)

इकाई / Unit-II

2. (a) दर्शाइए कि

$$L\{\sinh at \cos at\} = \frac{a(p^2 - 2a^2)}{p^4 + 4a^4}$$

Show that

$$L\{\sinh at \cos at\} = \frac{a(p^2 - 2a^2)}{p^4 + 4a^4}$$

(b) हल कीजिए $(D+1)^2y = t$ दिया गया है कि $y = -3$ जब $t = 0$ तथा $y = -1$ जब $t = 1$
Solve $(D+1)^2y = t$ given that $y = -3$ when $t = 0$ and $y = -1$ when $t = 1$.

(c) हल कीजिए $(D^3+1)y = 1, t > 0$ यदि $y = Dy = D^2y = 0$ जब $t = 0$
Solve $(D^3+1)y = 1, t > 0$ if $y = Dy = D^2y = 0$ when $t = 0$.

इकाई / Unit-III

3. (a) स्वेच्छ अचर a, b, c को बीजीय समीकरण

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

से विलोपन करके आंशिक अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

(4)

Form a partial differential equation, by eliminating arbitrary constants a, b, c from the algebraic equation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(b) सम्बन्ध $z = y^2 + 2f\left(\frac{1}{x} + \log y\right)$ से स्वेच्छ फलन f का विलोपन कीजिए।

Eliminate the arbitrary function f from the relation $z = y^2 + 2f\left(\frac{1}{x} + \log y\right)$.

(c) पूर्ण हल ज्ञात कीजिए:

$$q = px + p^2$$

Find the complete solution:

$$q = px + p^2$$

इकाई / Unit-IV

4. (a) समीकरण

$$\begin{aligned} (1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + (1-y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ + x\frac{\partial z}{\partial x} + 3x^2y\frac{\partial z}{\partial y} - 2z = 0 \end{aligned}$$

का वर्गीकरण कीजिए।

Classify the equation :

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + (1-y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial z}{\partial x} + 3x^2y\frac{\partial z}{\partial y} - 2z = 0$$

- (b) निम्नांकित आंशिक अवकल समीकरण का वर्गीकरण कीजिए और विहित (कैनोनिकल) रूप में समानयन कीजिए :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Classify the following partial differential equation and reduce to canonical form :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

- (c) हल कीजिए

$$(D^2 - 2DD' + D'^2)z = 12xy$$

Solve

$$(D^2 - 2DD' + D'^2)z = 12xy$$

इकाई / Unit-V

5. (a) मानलो एक फलनक $I[y(x)]$ वर्ग $C^1[0, 1]$ पर निम्नांकित रूप में परिभाषित है :

$$I[y(x)] = \int_0^1 \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$$

सिद्ध कीजिए कि

$$I[1] = 1, I[x] = \sqrt{2} \text{ तथा}$$

$$I[x^2] = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1} 2$$

Let a functional $I[y(x)]$ defined on the class $C^1[0, 1]$ be given by

$$I[y(x)] = \int_0^1 \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$$

Prove that

$$I[1] = 1, I[x] = \sqrt{2} \text{ and}$$

$$I[x^2] = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1} 2$$

- (b) सिद्ध कीजिए कि फलनक

$$I[y(x)] = \int \sqrt{x(1+y'^2)} dx \text{ के चरम}$$

(extremals) परवलय होंगे।

(7)

Prove that the extremals of the functional

$$I[y(x)] = \int \sqrt{x(1+y'^2)} dx \text{ are parabolas.}$$

- (c) परवलय $y = x^2$ और सरल रेखा $x - y = 5$ के बीच की लघुत्तम दूरी ज्ञात कीजिए।

Find the shortest distance between the parabola $y = x^2$ and the straight line $x - y = 5$.

<https://universitynews.in>