



FD-2759

B.Sc./B.Sc. B.Ed. (Part-III)
Examination, 2022

MATHEMATICS

Paper - II

Abstract Algebra

Time : Three Hours] [*Maximum Marks* : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं दो भागों के उत्तर दीजिए।
सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer any **two** parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. (a) मान लीजिए R^+ सभी धन वास्तविक संख्याओं का गुणात्मक समूह है। एक प्रतिचित्रण $f: R^+ \rightarrow R^+$, $f(x) = x^2$, $\forall x \in R^+$ द्वारा परिभाषित है। सिद्ध कीजिए कि f एक स्वाकारिता है।

Let R^+ be the multiplicative group of all strictly positive real number. Define $f: R^+ \rightarrow R^+$ by $f(x) = x^2, \forall x \in R^+$

Prove that f is an automorphism.

- (b) उपसमूह के प्रासामान्यक को परिभाषित कीजिए। सिद्ध कीजिए कि किसी समूह के उपसमूह को प्रासामान्यक, समूह का एक उपसमूह होता है।

Define a normalizer of a subgroup. Prove that a normalizer of a subgroup of any group is a subgroup of a group.

- (c) मान लीजिए कि G कोटि 108 का एक समूह है। दिखाइए कि G का कोटि 27 या 9 के एक प्रासामान्य उपसमूह का अस्तित्व होता है।

Let G be a group of order 108. Show that there exists a normal subgroup of order 27 or 9.

इकाई / Unit-II

2. (a) सिद्ध कीजिए कि एक वलय का प्रत्येक विभाग वलय, उस वलय का समाकारी प्रतिबिम्ब होता है।

Prove that every quotient ring of a ring, is homeomorphic image of the ring.

- (b) सिद्ध कीजिए कि पूर्णाकों का वलय एक मुख्य गुणजावली वलय होता है।

Prove that ring of integers is principal ideal ring.

- (c) दर्शाइए कि ए R -मॉड्यूल M के दो उपमॉड्यूल का सर्वनिष्ठ भी M का एक उपमॉड्यूल होता है।

Show that the intersection of two submodules of an R -module M is also a submodule of M .

इकाई / Unit-III

3. (a) K के किस मान के लिए सदिश $(1, K, 5)$, $V_3(R)$ में सदिशों $(1, -3, 2)$ और $(2, -1, 1)$ का एकघात संचय है।

Find the value of K for which the vector $(1, K, 5)$ of $V_3(R)$ is a linear combination of $(1, -3, 2)$ and $(2, -1, 1)$.

- (b) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित जनित सदिश समष्टि का एक परिमित आधार होता है।

Prove that every finitely generated vector space has a finite basis.

- (c) V_4 के रैखिक सदिशों के उपसमुच्चय $\{(1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ को V_4 के आधार के रूप में विस्तारित कीजिए।

Extend the linearly independent subset $\{(1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ of V_4 to form a basis of V_4 .

इकाई / Unit-IV

4. (a) सिद्ध कीजिए कि प्रतिचित्रण $f: V_2(R) \rightarrow V_3(R)$, जो $f(a, b) = (a + b, a - b, b)$ से परिभाषित है, एक रैखिक रूपांतरण है।

Prove that the mapping $f: V_2(R) \rightarrow V_3(R)$ which is defined by $f(a, b) = (a + b, a - b, b)$ is a linear transformation.

- (b) रैखिक रूपांतरण $T: V_2 \rightarrow V_3$ जो $T(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2, x_2)$ द्वारा परिभाषित है। T का परास, अष्टि, जाति तथा शून्यता ज्ञात कीजिए।

A linear transformation $T: V_2 \rightarrow V_3$ be defined by $T(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2, x_2)$. Find the range, kernel, rank and nullity of T .

- (c) लैग्रांज की समानयन विधि से द्विघाती समघात

$$q = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2 - 7x_3^2 + 8x_1x_3$$

का विहित समघात में समानयन कीजिए और उसकी जाति, सूचकांक और चिह्निका ज्ञात कीजिए।

By the method of Lagrange's reduction, change the quadratic form

$$q = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2 - 7x_3^2 + 8x_1x_3$$

into canonical form and find its rank, index and signature.

इकाई / Unit-V

5. (a) क्या $(\alpha, \beta) = a_1\bar{b}_2 + a_2$, $\alpha = (a_1, a_2)$,

$\beta = (b_1, b_2)$ एक आंतर गुणन है ?

Is $(\alpha, \beta) = a_1\bar{b}_2 + a_2$, $\alpha = (a_1, a_2)$,

$\beta = (b_1, b_2)$ an inner product ?

(b) श्वार्ज असमिका का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Schwartz's inequality.

(c) सिद्ध कीजिए कि एक आंतर गुणन समष्टि में सदिशों का प्रासामान्य समुच्चय रैखिकतः स्वतंत्र होता है।

<https://universitynews.in/>

Prove that in an inner product space, any orthonormal set of vectors is linearly independent.

<https://universitynews.in/>

<https://universitynews.in/>