



2282

**B.Sc. (Part-I) Examination, 2022**  
**MATHEMATICS**  
**Third Paper**  
**(Geometry and Vector Calculus)**

*Duration of Examination: 1½ Hrs.*  
 परीक्षा का अवधि: 1½ घण्टा

*Max. Marks: 38*  
 पूर्णांक: 38

**Instructions to the Candidates:**

**परीक्षार्थी के लिए निर्देश:-**

**Part-A (Compulsory)**

Answer any five questions (upto 20 words each). Each question carries one marks.

कोई पांच प्रश्न को जिये। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 20 शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिए। प्रत्येक प्रश्न एक अंक का है। (5x1=5 Marks)

**Part-B (Compulsory)**

Answer any three questions (upto 100 words each). Each question carries five marks.

कोई तीन प्रश्न को जिये। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 100 शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिये। प्रत्येक प्रश्न पांच अंक का है। (3x5=15 Marks)

**Part-C**

Candidate is required to attempt any two question. (upto 400 words)

कोई दो प्रश्न का उत्तर दोजिये। प्रश्न का उत्तर 400 शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिये। (2x9=18 Marks)

**Part-A / भाग-अ**

- Q-1. Define conic section.  
 शंकु- परिच्छेद को परिभाषित कीजिए।
- Q-2. Write the general equation of a conic section.  
 शंकु-परिच्छेद के व्यापक समीकरण को लिखिए।
- Q-3. Write the polar equation of a line passing through two points  $(r_1, \theta_1)$  and  $(r_2, \theta_2)$ .  
 दो बिन्दुओं  $(r_1, \theta_1)$  तथा  $(r_2, \theta_2)$  से गुजरने वाली रेखा का ध्रुवीय समीकरण लिखिए।
- Q-4. Define Auxiliary circle and write its equation for the polar form of ellipse.  
 सहायक वृत्त को परिभाषित कीजिए तथा दीर्घवृत्त के ध्रुवीय रूप के लिए इसका समीकरण लिखिए।
- Q-5. Define Tangent line and tangent plane of a sphere.  
 गोले को स्पर्श रेखा तथा स्पर्श समतल को परिभाषित कीजिए।
- Q-6. Define enveloping cone and write the equation of enveloping cone  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  with vertex at the point  $(\alpha, \beta, \gamma)$   
 अन्वालोपी शंकु को परिभाषित कीजिए तथा गोले  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  के अन्वालोपी शंकु का समीकरण लिखिए जिसका शीर्ष बिन्दु  $(\alpha, \beta, \gamma)$  है।
- Q-7. Define Director sphere.  
 नियामक गोले को परिभाषित कीजिए।



- Q-8. Define Conjugate Diametral plane.  
संयुग्मो व्यास समतल को परिभाषित कीजिए।
- Q-9. Define Curl of a vector point function.  
सदिश बिन्दु फलन के कुन्तल को परिभाषित कीजिए।
- Q-10. Write the statement of stoke's theorem.  
स्टॉक प्रमेय के कथन को लिखिए।

**Part-B / भाग-ब**

- Q-11. Find the asymptotes of the hyperbola  $y^2 - xy - 2x^2 - 5y + x - 6 = 0$ . Also find the equation of its conjugate hyperbola.  
अतिपरवलय  $y^2 - xy - 2x^2 - 5y + x - 6 = 0$  की अनन्त स्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए। इसके संयुग्मी अतिपरवलय का समीकरण भी ज्ञात कीजिए।

- Q-12. If  $PSP'$  is a focal chord of a conic and  $l$  is its semi-latus rectum then prove that

$$\frac{2}{l} = \frac{SP \pm SP'}{SP \cdot SP'}$$

यदि  $PSP'$  वक्र की नाभीय जीवा तथा इसकी अर्ध नाभिलम्ब की लम्बाई  $l$  हो तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{2}{l} = \frac{SP \pm SP'}{SP \cdot SP'}$$

- Q-13. Find the equation of the cone whose vertex is  $(\alpha, \beta, \gamma)$  and base is the guiding curve  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$ .

उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष  $(\alpha, \beta, \gamma)$  तथा आधार निर्देशक वक्र  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$  है।

- Q-14. Find the equation of the cylinder whose generating lines are parallel to the line  $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$  and which touches the sphere  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

उस बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी जनक रेखाएँ  $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$  के समान्तर हैं तथा जो गोले  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  को स्पर्श करता है।

- Q-15. If  $\vec{a} = \sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ ,  $\vec{b} = \cos \theta \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$  and  $\vec{c} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ; then find

$$\left\{ \frac{d}{d\theta} \{ \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \} \right\}_{\theta = \dots}$$



यदि  $\vec{a} = \sin\theta i + \cos\theta j + \theta k$ ,  $\vec{b} = \cos\theta i - \sin\theta j - 3k$  तथा  $\vec{c} = 2i + 3j - k$ ; हो तो

$$\left\{ \frac{d}{d\theta} \{ \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \} \right\}_{\theta=0} \text{ ज्ञात कीजिए।}$$

Part-C / भाग-स

Unit-I / इकाई-I

Q-16. (a) Find the lengths and equation of the axes of the conic  $8x^2 + 4xy + 5y^2 = 24(x + y)$

शांकव  $8x^2 + 4xy + 5y^2 = 24(x + y)$  के अक्षों की लम्बाइयाँ तथा समीकरण ज्ञात कीजिए।

(b) Show that the latus rectum of the following parabola is  $2ab/\sqrt{(a^2 + b^2)}$ .

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (bx + ay - ab)^2$$

सिद्ध कीजिए कि निम्न परवलय को नाभिलम्ब  $2ab/\sqrt{(a^2 + b^2)}$  होती है:-

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (bx + ay - ab)^2$$

OR / अथवा

(a) A circle passing through the focus of a conic whose latus rectum is  $2l$  meets the conic in four points whose distances from the focus are  $r_1, r_2, r_3$  and  $r_4$  respectively, then prove that

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} = \frac{2}{l}$$

एक वृत्त, किसी शांकव को नाभि से गुजरता है जिसकी नाभिलम्ब  $2l$  है, तथा शांकव को चार बिन्दुओं पर मिलता है, जिनको

नाभि से लम्बाइयाँ क्रमशः  $r_1, r_2, r_3$  तथा  $r_4$  है तो सिद्ध कीजिए कि  $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} = \frac{2}{l}$

(b) Prove that the line  $\frac{l}{r} = A \cos\theta + B \sin\theta$  will touch  $\frac{l}{r} = 1 + e \cos\theta$  if  $(A - e)^2 + B^2 = 1$

सिद्ध कीजिए कि रेखा  $\frac{l}{r} = A \cos\theta + B \sin\theta$  शांकव  $\frac{l}{r} = 1 + e \cos\theta$  को स्पर्श करेगी, यदि  $(A - e)^2 + B^2 = 1$

Unit-II / इकाई-II

Q-17. (a) Two spheres of radii  $r_1$  and  $r_2$  cut orthogonally; prove that the radius of their common circle is

$$r_1 r_2 / \sqrt{(r_1^2 + r_2^2)}$$

$r_1$  और  $r_2$  त्रिभुजा के दो गोले लाम्बिक रूप से काटते हैं। सिद्ध कीजिए कि उनके उभयनिष्ठ वृत्त की त्रिभुजा है-

$$r_1 r_2 / \sqrt{(r_1^2 + r_2^2)}$$



- (b) Find the equation of a right circular cylinder whose guiding circle passes through the points  $(a,0,0)$ ,  $(0,b,0)$  and  $(0,0,c)$ .

उस लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका निर्देशक वृत्त बिन्दुओं  $(a,0,0)$ ,  $(0,b,0)$  और  $(0,0,c)$  से गुजरता है।

OR / अथवा

- (a) Find the equation of two planes which contain the line  $7x + 10y - 30 = 0 = 5y - 3z$  and touch the ellipsoid  $7x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 60$

दो समतलों का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा  $7x + 10y - 30 = 0 = 5y - 3z$  से गुजरते हैं। और दीर्घवृत्तज  $7x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 60$  को स्पर्श करते हैं।

- (b) Find the equation of the plane through the extremities of three conjugate semi diameters of an ellipsoid and show that it touches a fixed sphere.

दीर्घ वृत्तज के तीन संयुग्मी अर्धव्यासों के छोरों से गुजरने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए तथा प्रदर्शित कीजिए कि यह एक स्थिर गोले को स्पर्श करता है।

Unit-III / इकाई-III

- Q-18. (a) Find the angle between the surface  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  and  $z = x^2 + y^2 - 3$  at the point  $(2, -1, 2)$

सतहों  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  तथा  $z = x^2 + y^2 - 3$  के बीच का कोण बिन्दु  $(2, -1, 2)$  पर ज्ञात कीजिए।

- (b) If  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$  and  $r = |\vec{r}|$ ; then prove that  $\text{div } r^n \vec{r} = (n+3)r^n$

Hence show that  $r^n \vec{r}$  will be solenoidal if  $n = -3$

यदि  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$  तथा  $r = |\vec{r}|$ ; तो सिद्ध कीजिए कि  $\text{div } r^n \vec{r} = (n+3)r^n$

फलतः प्रदर्शित कीजिए कि  $r^n \vec{r}$  परिनालिकीय होगा यदि  $n = -3$

OR / अथवा

- (a) Evaluate  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , where  $\vec{F} = (x^2 + y^2)\hat{i} - 2xy\hat{j}$  and curve  $C$  is the rectangle in the  $xy$  plane bounded by  $x = 0, x = a, y = 0, y = b$

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ  $\vec{F} = (x^2 + y^2)\hat{i} - 2xy\hat{j}$  तथा वक्र  $C$ ,  $xy$  तल में  $x = 0, x = a, y = 0, y = b$  से निर्मित आयत है।

- (b) Using stoke's theorem, evaluate  $\int_C xy^2 dx + xy^2 dy$ , where  $C$  is the the square in the  $xy$  plane with vertices respectively  $(1,0), (-1,0), (0,1); (0,-1)$

स्टोक्स प्रमेय का उपयोग करके  $\int_C xy^2 dx + xy^2 dy$  का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ  $C$ ,  $xy$  समतल में एक वर्ग है, जिसके शीर्ष क्रमशः  $(1,0), (-1,0), (0,1); (0,-1)$  हैं।

.....