



B.Sc. (Part - III) EXAMINATION - 2021

MATHEMATICS

Second Paper

(Complex Analysis)

Duration : 90 Minutes]

[Max. Marks : 75 for Science

अवधि : 90 Minutes]

[पूर्णांक : 75

Instructions to the candidates :

Attempt questions to the extent of 50% of maximum marks of the question paper. Any question with or without 'or' or from any unit/section/part may be chosen.

प्रश्न पत्र के किसी भी इकाई/भाग/खंड में से स्वेच्छा से इस प्रकार प्रश्नों का चयन करें कि प्रश्न पत्र के पूर्णांक में से अधिकतम 50% अंकों के प्रश्न हल हो सकें। 'अथवा' के साथ दिए प्रश्नों में भी किसी प्रकार की बाध्यता नहीं है।

Part - A [Marks : 15] Each question carries equal marks. (50 words each)

भाग - अ [अंक : 15] प्रत्येक प्रश्न के समान अंक हैं। (प्रत्येक 50 शब्द)

Part - B [Marks : 15] Each question carries equal marks. (100 words each)

भाग - ब [अंक : 15] प्रत्येक प्रश्न के समान अंक हैं। (प्रत्येक 100 शब्द)

Part - C [Marks : 45] Each question carries equal marks. (400 words each)

भाग - स [अंक : 45] प्रत्येक प्रश्न के समान अंक हैं। (प्रत्येक 400 शब्द)

PART - A / भाग - अ

Q1) Define geometric representation of Complex Number and Argand Plane.

सम्मिश्र संख्या के ज्यामितीय रूप और आर्गंड समतल को परिभाषित कीजिए।

Q2) State Jordan's Curves Theorem.

जोर्डान वक्र प्रमेय का कथन लिखिए।

Q3) If $w = z^2$ then find $\frac{dw}{dz}$.

यदि $w = z^2$ तो $\frac{dw}{dz}$ ज्ञात कीजिए।

Q4) Define Analytic function.

विश्लेषिक फलन को परिभाषित कीजिए।



Q5) Define Bilinear transformation.

द्विरेखिक रूपान्तरण को परिभाषित कीजिए।

Q6) Find the image of P(2,3) under the Transformation $w = z + i$.

रूपान्तरण $w = z + i$ के अन्तर्गत बिन्दु P(2,3) का प्रतिबिम्ब ज्ञात कीजिए।

Q7) Show that $\int_c \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$

दर्शाइये $\int_c \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$

Q8) Write Cauchy Riemann equations in polar form.

कोशी रीमान समीकरण ध्रुवीय रूप में लिखिए।

Q9) Give statement of Morera Theorem.

मोरेरा प्रमेय का कथन लिखिए।

Q10) Write Taylor series expansion of $\sin z$ about $z = \pi/4$.

$\sin z$ का $z = \pi/4$ के परित टेलर प्रसार लिखिए।

PART - B / भाग - ब

Q11) For what values of z do the function w defined by the following equation ceases to be analytic.

$$z = \sinh u \cos v + i \cosh u \sin v$$

निम्न समीकरण द्वारा परिभाषित फलन w , z के किन मानों के लिए वैश्लेषिक नहीं है।

$$z = \sinh u \cos v + i \cosh u \sin v$$

Q12) Prove that in the region $|z| < 1$, $f(z) = z^2$ is uniformly continuous whereas

$$f(z) = \frac{1}{z} \text{ is not so.}$$

सिद्ध कीजिए कि प्रान्त $|z| < 1$ में $f(z) = z^2$ एकसमान संतत है जबकि $f(z) = \frac{1}{z}$ एक समान संतत नहीं है।



Q13) Find the bilinear transformation that maps the points $z_1 = \infty$, $z_2 = i$ and $z_3 = 0$ into the points $w_1 = 0$, $w_2 = i$ and $w_3 = \infty$ respectively.

वह द्विरैखिक रूपांतरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $z_1 = \infty$, $z_2 = i$ और $z_3 = 0$ को क्रमशः बिन्दुओं $w_1 = 0$, $w_2 = i$ तथा $w_3 = \infty$ में प्रतिचित्रित करता है।

Q14) Verify Cauchy's integral theorem for the function $f(z) = z^3 - iz^2 - 5z + 2i$ where c is the circle $|z-1| = 2$.

फलन $f(z) = z^3 - iz^2 - 5z + 2i$ के लिए कोशी समाकल प्रमेय का सत्यापन कीजिए जहाँ c वृत्त $|z-1| = 2$ है।

Q15) Find the radius of convergence of the following power series.

निम्न घात श्रेणी की अभिसरण त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

$$\sum \frac{(-1)^n}{n} (z - 2i)^n$$

PART - C / भाग - स
Unit - I / इकाई - I

Q16) a) If P, Q, R represents the complex numbers $z_1, z_2, z_1 + z_2$ respectively then show that OPRQ is a parallelogram.

यदि बिन्दु P, Q, R क्रमशः सम्मिश्र संख्याएँ $z_1, z_2, z_1 + z_2$ को निरूपित करते हो तो प्रदर्शित कीजिए कि OPRQ एक समान्तर चतुर्भुज है।

b) State and prove necessary condition for a function $f(z) = u + iv$ to be analytic.

फलन $f(z) = u + iv$ के विश्लेषिक होने के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध सिद्ध कीजिए।

OR / अथवा

a) If $f(z) = \frac{x^3 y(y - ix)}{x^6 + y^2}$ ($z \neq 0$), $f(0) = 0$ prove that $\frac{f(z) - f(0)}{z} \rightarrow 0$

as $z \rightarrow \infty$ along any radius vector but not as $z \rightarrow 0$ in any manner.

यदि $f(z) = \frac{x^3 y(y - ix)}{x^6 + y^2}$ ($z \neq 0$), $f(0) = 0$ तो सिद्ध कीजिए कि

$\frac{f(z) - f(0)}{z} \rightarrow 0$ जबकि z किसी भी ध्रुवान्तर के अनुदिश शून्य को अग्रसर होता है।

परन्तु जब z किसी भी प्रकार शून्य को अग्रसर होता हो तो ऐसा नहीं होगा।

b) Prove that the function $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$ is harmonic also determine the harmonic conjugate and find corresponding $f(z)$.

सिद्ध कीजिए कि फलन $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$ प्रसंवादी है। साथ ही संयुग्मी प्रसंवादी निर्धारित कीजिए तथा संगत विश्लेषिक फलन $f(z)$ ज्ञात कीजिए।



Unit - II / इकाई - II

Q17) a) Prove that every Bilinear transformation maps circles or straight lines into circles or straight lines.

सिद्ध कीजिए प्रत्येक द्विरेखिक रूपान्तरण वृत्त या सरल रेखा को वृत्त या सरल रेखा में प्रतिचित्रित करता है।

b) Show that the transformation $w = \frac{2z + 3}{z - 4}$ maps the circle $x^2 + y^2 - 4x = 0$ into the straight line $4u + 3 = 0$

प्रदर्शित कीजिए कि रूपान्तरण $w = \frac{2z + 3}{z - 4}$ वृत्त $x^2 + y^2 - 4x = 0$ को सरल रेखा $4u + 3 = 0$ में प्रतिचित्रित करता है।

OR / अथवा

State and prove necessary and sufficient condition for $w = f(z)$ to be a conformal mapping.

$w = f(z)$ के अनुकोण प्रतिचित्रित के लिए आवश्यक तथा पर्याप्त प्रतिबन्ध लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

Unit - III / इकाई - III

Q18) a) State and prove Cauchy Integral Theorem.

कोशी समाकल प्रमेय को सिद्ध कीजिए।

b) Find the value of $\int_c \frac{dz}{(z-2)}$ around the square whose vertices are $2 \pm 2i, -2 \pm 2i$.

वर्ग जिसके शीर्ष $2 \pm 2i, -2 \pm 2i$ हो उसके चारों $\int_c \frac{dz}{(z-2)}$ का मान ज्ञात कीजिए।

OR / अथवा

Obtain the Taylor and Laurent's series which represents the function

$\frac{z^2 - 1}{(z + 2)(z + 3)}$ in the regions. (i) $|z| < 2$ (ii) $2 < |z| < 3$ (iii) $|z| > 3$.

टेल्सर तथा लौरां श्रेणी को प्राप्त कीजिए जो फलन $\frac{z^2 - 1}{(z + 2)(z + 3)}$ को (i) $|z| < 2$ (ii) $2 < |z| < 3$

(iii) $|z| > 3$. क्षेत्रों में निरूपित करता है।

