



A-22

[Total No. of Questions : 21

B.Sc. (Part - III) EXAMINATION - 2021

MATHEMATICS

First Paper

(Real Analysis)

Duration : 90 Minutes]

[Max. Marks : 75 for Science

अवधि : 90 Minutes]

[पूर्णांक : 75

Instructions to the candidates :

Attempt questions to the extent of 50% of maximum marks of the question paper. Any question with or without 'or' or from any unit/section/part may be chosen.

प्रश्न पत्र के किसी भी इकाई/भाग/खंड में से स्वेच्छा से इस प्रकार प्रश्नों का चयन करें कि प्रश्न पत्र के पूर्णांक में से अधिकतम 50% अंकों के प्रश्न हल हो सकें। 'अथवा' के साथ दिए प्रश्नों में भी किसी प्रकार की बाध्यता नहीं है।

Part - A [Marks : 15] Each question carries equal marks. (50 words each)

भाग - अ [अंक : 15] प्रत्येक प्रश्न के समान अंक हैं। (प्रत्येक 50 शब्द)

Part - B [Marks : 15] Each question carries equal marks. (100 words each)

भाग - ब [अंक : 15] प्रत्येक प्रश्न के समान अंक हैं। (प्रत्येक 100 शब्द)

Part - C [Marks : 45] Each question carries equal marks. (400 words each)

भाग - स [अंक : 45] प्रत्येक प्रश्न के समान अंक हैं। (प्रत्येक 400 शब्द)

PART - A

भाग - अ

Q1) Define open and closed sets.

विवृत एवं संवृत समुच्चय को परिभाषित कीजिये।

Q2) Define compact set.

संहत समुच्चय को परिभाषित कीजिये।

Q3) Give one example of removable discontinuity.

अपनेय असांतत्यता का एक उदाहरण दीजिये।

Q4) Give statement of Mostest theorem for continuous functions.

संतत फलनों के लिये मास्टेस्ट प्रमेय का प्रकथन लिखिये।

P.T.O.



- Q5)** Give one example of a function which is continuous but not differentiable.
ऐसे फलन का उदाहरण दीजिये जो संतत हो किन्तु अवकलनीय नहीं हो ।
- Q6)** Write statement of Darboux's intermediate value theorem for derivatives.
अवकलनों के लिये डारबो मध्यमान प्रमेय का प्रकथन लिखिये ।
- Q7)** Give geometrical interpretation of Cauchy's mean value theorem.
कॉशी मध्यमान प्रमेय का ज्यामितीय अर्थ लिखिये ।
- Q8)** Write the necessary and sufficient condition for the convergence of a sequence.
अनुक्रम के अभिसरण की आवश्यक एवं पर्याप्त शर्त लिखिये ।
- Q9)** Write Cauchy's general principle of convergence of sequences.
अनुक्रमों के अभिसरण का कॉशी वाला सामान्य सिद्धान्त लिखिये ।
- Q10)** Define Fourier series.
फूरिये श्रेणी को परिभाषित कीजिये ।

PART - B

भाग - ब

- Q11)** Prove that every compact subset of real numbers is closed.
सिद्ध कीजिये कि वास्तविक संख्याओं का प्रत्येक संहत उपसमुच्चय संवृत होता है ।
- Q12)** Examine the continuity of following function at $x = 0$.
निम्न फलन की बिन्दु $x = 0$ पर सातत्यता की जाँच कीजिये:
- $$f(x) = \frac{e^{1/x} - 1}{e^{1/x} + 1}$$
- Q13)** If a function f is differentiable at a point $x = c$ and is one - one on some neighbourhood of c , then prove that inverse function of f is also differentiable at $f(c)$.
यदि एक फलन f बिन्दु $x = c$ पर अवकलनीय हो तथा इसके सामीप्य में एकैकी हो तो सिद्ध कीजिये कि f का प्रतिलोम फलन भी $f(c)$ पर अवकलनीय होगा ।
- Q14)** Prove that every convergent sequence has a unique limit.
सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम की सीमा अद्वितीय होती है ।
- Q15)** Test the following series for convergence:
निम्न श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिये :

$$1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{10} + \dots + \frac{x^n}{n^2 + 1} + \dots \text{ here (यहाँ) } x > 0.$$



PART - C

भाग - स

UNIT - I

इकाई - I

Q16) a) Prove that every complete ordered field is an Archimedean ordered field.
सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक पूर्ण क्रमित क्षेत्र एक आर्किमिडीय क्रमित क्षेत्र होता है।

b) Any subset S of R is an open set if and only if its complement $\sim S$ is closed. Prove it.

सिद्ध कीजिये कि R का कोई उपसमुच्चय S विवृत समुच्चय है यदि और केवल यदि इसका पूरक समुच्चय $\sim S$ संवृत होगा।

OR/अथवा

Q17) a) Prove the equivalence of the two definitions of continuity, the Cauchy definition and Heine definition.

सांतत्यता की कॉशी तथा हैनी की दो परिभाषाओं की तुल्यता को सिद्ध कीजिये।

b) If a function f is continuous in a closed interval $[a, b]$; then it is bounded in that interval. Prove it.

सिद्ध कीजिये कि यदि फलन f संवृत अन्तराल $[a, b]$ में संतत हो तो वह उस अन्तराल में परिबद्ध होता है।

UNIT - II

इकाई - II

Q18) a) Find Lagrange's and Cauchy's remainders after n terms in the expansion of the following function:

निम्न फलन के विस्तार में n पदों के पश्चात् लाग्रान्ज और कॉशी रूप वाले शेषफल ज्ञात कीजिये:

$$f(x) = \log(1+x)$$

b) Show that the sequence $\langle x_n \rangle$ where $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; where $n \in \mathbb{N}$, is convergent and its limit lies between 2 and 3.

सिद्ध कीजिये कि अनुक्रम $\langle x_n \rangle$ जहाँ $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ जहाँ $n \in \mathbb{N}$, अभिसारी होगी तथा इसकी सीमा 2 तथा 3 के मध्य होगी।

OR/अथवा



Q19) a) Examine the differentiability of the function $f(x) = |x - 2| + 2|x - 3|$ in the interval $[1, 4]$.

फलन $f(x) = |x - 2| + 2|x - 3|$ की अन्तराल $[1, 4]$ में अवकलनीयता की जाँच कीजिये।

b) Prove that the following sequence $\langle x_n \rangle$ converges to the positive root of the equation $x^2 - x - 7 = 0$, where $x_1 = \sqrt{7}$, $x_{n+1} = \sqrt{7 + x_n}$

सिद्ध कीजिये कि निम्न अनुक्रम $\langle x_n \rangle$ समीकरण $x^2 - x - 7 = 0$ के धन मूल को अभिसृत होती है जहाँ:- $x_1 = \sqrt{7}$, $x_{n+1} = \sqrt{7 + x_n}$.

UNIT - III

इकाई - III

Q20) a) Examine the convergence of the following series:

निम्न श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिये:-

$$x^2(\log 2)^2 + x^3(\log 3)^2 + x^4(\log 4)^2 + \dots$$

b) Show that the following series is conditionally convergent:

$$\sum (-1)^n [\sqrt{(n^2 + 1)} - n]$$

प्रदर्शित कीजिये कि निम्न श्रेणी सप्रतिबन्ध अभिसारी है।

$$\sum (-1)^n [\sqrt{(n^2 + 1)} - n]$$

OR/अथवा

Q21) a) Discuss the convergence and absolute convergence of the following series:

निम्न श्रेणी की अभिसरण तथा निरपेक्ष अभिसरण के लिये विवेचना कीजिये :-

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots$$

b) Find the Fourier series for the following function:

निम्न फलन के लिये फुरिये श्रेणी ज्ञात कीजिये:-

$$f(x) = \begin{cases} -\pi, & \text{for } -\pi < x < 0 \\ x, & \text{for } 0 < x < \pi \end{cases}$$

